سال سی و دوم، شمارهٔ دو، ۱۴۰۰(۹۳- ۱۱۲)
DOI: 10.22067/jacsm.2021.68770.1007

تحلیل فرکانسی تیرهای متخلخل ترک‌دار مدرج تابعی روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌سوم ردی*

مقاله پژوهشی

محمدامین فرقانی[۱] یوسف بازرگان لاری[۲] پرهام زاهدی نژاد[۳] محمدجواد کاظم‌زاده پارسی[٤]

چکیده *در این مقاله، تحلیل فرکانسی تیرهای متخلخل ترک‌دار مدرج تابعی روی بستر الاستیک بر اساس تئوری مرتبه‌سوم تغییر شکل برشی ردی بررسی می‌شود. مشخصات مکانیکی مواد انتخاب‌شده به‌طور پیوسته در جهت ضخامت تغییر می‌کنند. تغییرات خواص مکانیکی بر اساس مدل قانون نمایی تعیین می‌شود. با به‌کارگیری تئوری مرتبه‌سوم تغییر شکل برشی و با اعمال اثر بستر الاستیک خطی، با استفاده از اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله حاصل می‌شود. باتوجه‌به پیچیدگی حل بسته‌ای این معادلات، معادلات دیفرانسیل حاکم با فرض شرایط مرزی از نوع تکیه‌گاه مختلف، به‌کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته حل می‌شوند. به‌منظور صحت‌سنجی، نتایج این تحقیق با نتایج سایر مقالات مقایسه می‌شود. این بررسی نشان می‌دهد که اختلاف بین نتایج این مقاله با نتایج سایر مقالات ناچیز است. در نهایت اثر پارامترهای هندسی و شاخص نمایی خواص مواد، موقعیت و عمق ترک لبه، بستر الاستیک و تخلخل روی فرکانس طبیعی تیرهای مدرج تابعی ارزیابی می‌شود. نتایج این مقاله و تأثیرات این پارامترها می‌تواند در طراحی بهینهٔ تیرهای مدرج تابعی و در تکنیک‌های پیش‌بینی، کشف و پایش ترک استفاده شود.*

واژه‌های کلیدی تحلیل فرکانسی، مدرج تابعی نمایی، ترک لبه، تخلخل، وینکلر-پاسترناک، تئوری مرتبه‌سوم ردی.

مقدمه

در سال‌های اخیر مواد مدرج کاربردهای زیادی در صنایع مختلف داشته‌اند ازجمله هوافضا، انرژی، ساختمان، پزشکی و... موادی جدید و پیشرفته با ساختاری ناهمگن گفته می‌شود. خواص مکانیکی این مواد پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند و این تغییرات به‌وسیلهٔ تغییر تدریجی نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها ایجاد می‌شود. مواد هدفمند مدرج به‌طور معمول از ۲ماده سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. باتوجه‌به اینکه مادهٔ ساختاری سرامیک ضریب انتقال حرارت پایین و مقاومت بالایی در برابر درجه‌حرارت دارد، می‌تواند حرارت بالا را تحمل کند و از طرفی، مادهٔ ساختاری دیگر، یعنی فلز انعطاف‌پذیری مورد نیاز را فراهم می‌کند. قابل توجه است که به‌علت تغییرات پیوستهٔ خواص مکانیکی مشکلات عدم‌پیوستگی که در سازه‌های کامپوزیتی موجود است، در مواد تابعی به‌وجود نمی‌آید. بااین‌حال آسیب‌های جزئی ممکن است در ساختار مواد مدرج تابعی به‌وجود بیاید که در شرایط محیطی جدی‌تر (ارتعاشی، خوردگی و دمای بالا) می‌تواند منجر به آسیب‌های کلی‌تری شود. پیدایش ترک در یک سازه باعث کاهش سفتی، جرم و میرایی و در نتیجه تغییر در خصوصیات ارتعاشی یک سازه می‌شود. شناسایی تأثیرات ترک و عیوب می‌تواند در یافتن پیدایش اولیهٔ ترک و محل ترک در تیرها کمک بسزایی

* تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۹/۱۱/۱۸ و تاریخ پذیرش آن۱٤۰۰/٤/۰۳ می‌باشد.
(۱)دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.
(۲)نویسنده مسئول: استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران. **Email**:bazarganlari@iaushiraz.ac.ir
(۳)استادیار، دپارتمان مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه تگزاس شمالی، آمریکا.
(٤)دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

کند و از بروز فجایع بزرگ و هزینه‌های زیاد جلوگیری کند. شناسایی محل ترک با این روش به‌خاطر کاربرد عملی اهمیت بسزایی دارد. تعدادی روش برای مدل‌کردن ترک در تیرها وجود دارد که در ۲دستهٔ کلی قرار می‌گیرند [1, 2].

مدل‌های انعطاف‌پذیر توده‌ای و مدل‌های سفتی پیوسته. در مدل‌های انعطاف‌پذیر توده‌ای ترک به‌وسیلهٔ یک فنر پیچشی بدون وزن مدل می‌شود که ماتریس ضریب انعطاف‌پذیری فنر از روش نرخ آزادسازی انرژی کرنش و فاکتور شدت تنش (SIF) به‌دست می‌آید [2]. در مدل سفتی پیوسته، محققان تلاش کرده‌اند تا ارتعاشات تیر ترک‌دار را با معادلات واحدی که محل و عمق را شامل می‌شود، توصیف کنند.

بر اساس مکانیک شکست، کاهش سفتی تیر مدرج تابعی که در اثر پیدایش ترک به‌وجود آمده است، توسط مدل سفتی پیوسته مدل می‌شود [3]. در تحقیقات اولیه بیشتر از روی مکانیک شکست، ضریب شدت تنش و تحلیل روابط حاکم بر آن به بررسی رفتارهای ارتعاشی تیرهای هدفمند پرداخته می‌شد [4]. شیفرین و روتلو [5] به بررسی و استخراج فرکانس‌های تیر مکانیکی با تعداد ترک دلخواه پرداختند. آن‌ها در این تحلیل از روش عددی برای حل معادلات حاکم استفاده کردند. سپس در سال ۲۰۰٤ اسوامیداس، یانگ وسشدری [6] به بررسی مدل اثرات سایز ترک و محل آن روی رفتار ارتعاشی تیرها پرداختند. آن‌ها در این مطالعه با استفاده از تئوری مکانیک شکست، تئوری‌های برنولی، تیموشنکو و اصل انرژی معادلات حاکم را به‌دست آوردند و با استفاده از روش عددی گالرکین به حل معادلات حاکم پرداختند. باریس بینیسی [7] به بررسی تحلیلی و اجزای محدود تیرهای با تعداد ترک دلخواه و تحت اثر بار محوری پرداخت و نتایج این ۲روش را باهم مقایسه کرد. لین و چانگ [8] یک روش حل تحلیلی برای تیر یک‌سر گیردار ترک‌دار که با فنر پیچشی مدل می‌شد و تحت اثر یک‌بار متحرک نقطه‌ای قرار داشت را به روش ماتریس انتقال و تکنیک بسط سری‌های مودال بررسی کردند. مینگ هونگ سو [9] به بررسی ارتعاشات تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار روی بستر الاستیک پرداخت. در این مطالعه وی با استفاده از تئوری تیر برنولی و درنظرگرفتن بار محوری ضمن استخراج معادلات حاکم به بررسی ارتعاشات تیر دارای یک ترک رو بستر الاستیک به روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی برای شرایط مرزی مختلف پرداخت. یانگ، چن و ژیا [10] به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری تیرهای غیرهمگن نمایی ترک‌دار تحت‌تأثیر نیروی محوری و بار متحرک پرداختند. در این بررسی آن‌ها ترک را به‌صورت فنر پیچشی مدل کردند و با استفاده از تئوری اویلر برنولی یک راه‌حل تحلیلی برای به‌دست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی این مسئله ارائه کردند.

همچنین یانگ و چن [11] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار لبهٔ عرضی با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی و مدل ترک فنر پیچشی برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش تحلیلی–عددی پرداختند. ماتبولی، راگب و نسار [12] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی نمایی ترک‌دار روی بستر الاستیک وینکلر–پاسترناک پرداختند. آن‌ها در این مطالعه با استفاده از تئوری تیر برنولی و مدل ترک بفرم فنر طولی خطی، معادلات حاکم را استخراج کرده و برای حل معادلات از روش مربعات دیفرانسیلی استفاده کردند. سپس ک، یانگ و کیتیپرنچای [13] به بررسی ارتعاشات و کمانش الاستیک تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار عرضی برای شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن‌ها نیز ترک را به‌صورت فنر پیچشی بدون وزن مدل کردند و با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و به روش تحلیلی فرکانس‌های ارتعاشی و بار بحرانی تیر را به‌دست آوردند. فرزکی، طاحانی و طوسی [14] به بررسی تیرهای ارتعاشی مدرج تابعی ترک‌دار عرضی با استفاده از تئوری تیموشنکو پرداختند. در این بررسی آن‌ها با استفاده از روش ماتریس‌های موج رفتار ارتعاشی

تیرهای تابعی مدرج ترک‌دار در شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند. کمیل آیدین [15] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای هدفمند مدرج دارای تعداد دلخواه ترک سطحی برای شرایط مرزی مختلف پرداخت. او در این مطالعه با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی و با مدل فنر بدون جرم پیچشی ترک معادلات حاکم را استخراج کرد و به روش تحلیلی دینامیکی معادلات را حل کرد. توزیع ماده در این تیر مدرج به‌صورت نمایی تغییر می‌کرد.

شرافت‌نیا، فراحی و فقیدیان [16] به بررسی یک راه‌حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و کمانش تیرهای مدرج تابعی نمایی ترک‌دار عرضی با استفاده از ٤تئوری مهندسی پرداختند. تئوری‌های اویلر برنولی، رایلی و تیموشنکو در این تحقیق به‌کار گرفته شد. در این مطالعه، ترک هم‌زمان با ۲فنر پیچشی و طولی مدل شد و ارتعاشات تیر برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار-آزاد با درنظرگرفتن خصوصیات ماده، عمق ترک، محل ترک، ضریب لاغری تیر بررسی شد. ون لین، ترانگ داک و تین خیم [17] به بررسی فرکانس‌های ارتعاشی تیر هدفمند مدرج دارای ترک‌های عرضی پرداختند. آن‌ها در این مطالعه یک معادلهٔ جدید ارتعاشی برای تیرهای هدفمند مدل کسر حجمی و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و روش حل ماتریس سفتی دینامیک ترک ارائه کردند. در این مطالعه نیز به‌صورت فنر پیچشی بدون جرم در نظر گرفته شده است. شعبانی و کندیگلو [18] ارتعاشات آزاد تیر یک‌سر گیردار مدرج تابعی که با مدل نمایی و توانی در جهت عرض تغییر می‌کرد را بررسی کردند. در این تیر ۲ترک عرضی در نظر گرفته شده و با استفاده از تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی و روش حل اجزای محدود فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده است.

رضایی و همکاران [19] یک مدل پیوسته برای مطالعهٔ ارتعاشات عرضی تیر اویلر برنولی ترک‌دار ارائه کردند. داین مدل با کمک اصول مکانیک شکست تابع اغتشاش ترک در میدان تنش و کرنش ارائه شده است و معادلات با استفاده از روش گالرکین حل شده‌اند.

علی جانی و ابدی [20] یک حل تقریبی بر مبنای روش رایلی برای تحلیل رفتار مودال تیر اویلر-برنولی ترک‌دار روی بستر الاستیک ارائه کردند.

اغلب تیرهای مکانیکی و سازه‌های مهندسی مانند سازه‌های ساختمانی، سازه‌های دریایی، خطوط لوله نفت و گاز روی زمین استوار هستند. به‌همین دلیل بسیاری از محققان به‌دنبال تجزیه و تحلیل رفتار این سازه‌ها روی بسترهای الاستیک مختلف هستند [21]. در بسیاری از مسائل ساختار خاک به‌منظور ساده‌سازی، بستر الاستیک معمولا با پایهٔ ویکنلر مدل شده است. با این حال، نشان داده شده است که رفتار مواد بستر در علم مهندسی نمی‌تواند صرفا با مدل بستر الاستیک وینکلر که شامل فنرهای کششی خطی مستقل است، بیان شود. به‌همین دلیل پاسترناک به‌منظور یافتن یک مدل پایهٔ فیزیکی و دقیق‌تر، بستری با ۲پارامتر را با تعاملات برشی پیشنهاد کرد. اولین پارامتر بستر مشابه مدل مبتنی بر وینکلر است و پارامتر دوم، سختی لایهٔ برشی در مدل بستر است. ایزنبرگر [22] یک روش دقیق برای تحلیل ارتعاش تیرهای ایزوتروپیک روی پایه‌های الاستیک متغیر یک و دو متغیره ارائه کرد. چن، لو و بیان [23] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرها روی بستر الاستیک پاسترناک پرداختند. آن‌ها در این تحلیل با استفاده از روابط الاستیسیته معادلات حاکم را استخراج کرده و از روش مربعات دیفرانسیلی آن‌ها را برای شرایط مرزی مختلف حل کردند. اکباس [24] معادلات ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار روی بستر وینکلر را به کمک تئوری اویلر برنولی در اصل همیلتن استخراج و با استفاده از روش اجزای محدود حل کرد. در این مطالعه ترک به‌صورت فنر پیچشی بدون جرم در نظر گرفته شده بود. باغلانی و همکاران [25] با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا و سری فوریهٔ اصلاح‌شده به بررسی دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی روی بستر الاستیک پاسترناک پرداختند.

تخلخل که به‌دلیل تفاوت زیاد در دمای انجماد بین اجزای تشکیل‌دهنده در فرایند ساخت مواد مدرج تابعی ممکن است باعث ایجاد حفره‌های میکروسکوپی درون مواد در فرایند پخت شود، در سازه‌ها باعث ایجاد فرصت خوبی در پیشرفت در زمینه خواص مکانیکی سازه‌های مهندسی خواهد شد. یکی از کاندیداهای اصلی برای سازه‌های تحت بارهای ضربه‌ای یا دینامیکی، مواد مدرج تابعی متخلخل هستند که به‌طور فوق‌العاده‌ای جاذب انرژی هستند. مطالعات روی آنالیز ارتعاشی سازه‌های متخلخل به‌طور ویژه برای تیرها تاکنون به‌تعداد اندکی انجام پذیرفته است. یحیی [26] آنالیز ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحات دایره‌ای متخلخل مدرج تابعی را روی بستر الاستیک ارائه کرد. مشخص شد که کسر حجمی تخلخل و نوع گسترش تخلخل یک تأثیر کاملا مشخص روی پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی ابعادی صفحه‌های مدور با دامنه بالا دارد. مختاری و ابراهیمی [27] آنالیز ارتعاشات عرضی تیرهای تیموشنکو متخلخل مدرج تابعی چرخان را مطالعه کردند. آن‌ها از روش انتقال دیفرانسیلی جهت حل معادلات حرکت استفاده کردند. در اینجا کسر حجمی تخلخل نقش مهمی در ارتعاشات تیرهای متخلخل ایفا می‌کرد. مهمت آوکار [28] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی توانی و سیگموئید متخلخل که خصوصیات مواد تیر در جهت ضخامت به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند، پرداخت. در این تحقیق به‌کمک اصل همیلتن و تئوری تیرهای کلاسیک و تیموشنکو معادلات حاکم استخراج و به روش جداسازی متغیرها معادلات حاکم حل شد و نتایج با مقالات موجود مقایسه شده است. ماهاری رامتکه و پاندا [29] اثر توزیع تخلخل را روی رفتار ارتعاشی تیرهای مدرج تابعی تک و چندجهته مختلف با استفاده از اصل همیلتون و روش اجزای محدود بررسی کردند.

به‌طور کلی مطالعات کمتری روی ارتعاش آزاد تیرهای هدفمند مرتبه بالا وجود دارد. به‌دلیل پچیدگی خاص حل مسائل بر اساس تئوری مرتبه‌سوم برشی تیرها، روش‌های عددی قوی برای حل معادلات حاکم و شرایط مرزی آن‌ها مورد نیاز است. روش مربعات دیفرانسیلی از جمله روش‌های عددی است که در آن‌ها با استفاده از ضرایب وزنی معادلات دیفرانسیلی حاکم، به دسته‌ای از معادلات جبری مرتبه اول تبدیل می‌شوند. بدین ترتیب که در هر نقطه، مشتق به‌صورت یک مجموع خطی از ضرایب وزنی و مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه بیان می‌شود. با اعمال این روش، معادلات با مشتقات جزئی حاکم بر مسئله تبدیل به معادلات جبری می‌شوند که بر اساس نوع مسئله می‌تواند دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی باشد. این روش قابلیت حل انواع معادلات را داراست، ازجمله می‌توان به معادلات با ضرایب متغیر، غیرخطی و معادلات مقادیر ویژه اشاره کرد. روشDQ در دهه هفتاد میلادی توسط بلمان به‌عنوان جایگزینی بهتر برای تکنیک‌های اختلاف محدود، المان محدود و المان مرزی در حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در فیزیک و مهندسی ارائه شد. مزیت این روش نسبت به تکنیک‌های دیگر، سرعت محاسبات و استفاده از گره‌های کمتر بود. [32]. برای رفع نواقص آن، روش GDQ به‌عنوان فرم اصلاح‌شده روش DQ در ابتدای دهه نود میلادی به‌وسیلهٔ شاو و ریچاردز برای حل معادلات ناویر- استوکس دوبعدی ارائه شد. روش GDQ در تحقیق‌های بسیاری برای حل مسائل ارتعاشی و تحلیل تنش تیرها، ورق‌های مستطیلی و پوسته‌های استوانه‌ای به کار رفته است [32].

مروری بر ادبیات تحقیق نشان می‌دهد که تاکنون در زمینهٔ ارتعاشات آزاد تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار اغلب از تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو استفاده شده است. همچنین اثر هم‌زمان ترک و تخلخل در تیرهای مدرج نمایی تاکنون دیده نشده است. در این مقاله آنالیز فرکانسی تیرهای متخلخل ترک‌دار مدرج تابعی نمایی روی بستر الاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌سوم

ردی برای کاربرد در تیرهای ضخیم بررسی می‌شود که تاکنون با این روش انجام نشده است.

ماده مدرج تابعی این تیرها به‌صورت ترکیبی از ۲فاز درنظر گرفته شده است که به‌صورت قانون نمایی در جهت عرض تیر حاصل می‌شود. همچنین مدل توزیع غیریکنواخت و نامتقارن تخلخل در ترکیب با مدل نمایی در نظر گرفته می‌شود که به جذابیت کار می‌افزاید. معادلات حاکم و شرایط مرزی آن‌ها، با استفاده از اصل همیلتن به‌دست می‌آید. این معادلات به‌کمک روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته گسسته‌سازی و حل می‌شود. به این ترتیب، مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار به‌دست می‌آیند. همچنین اثر پارامترهای هندسی، موقعیت ترک، ضریب تخلخل و بستر الاستیک بر ارتعاش آزاد این نوع تیرها بررسی می‌شود.

تئوری، فرمول‌بندی و معادلات حاکم

خصوصیات مواد مدرج تابعی نمایی. مدل‌هایی که برای توزیع خواص در مواد تابعی مدرج وجود دارد، رابطه‌ای ریاضی برای هر خاصیت در هر نقطهٔ دلخواه از ماده بیان می‌کنند. این رابطه بر حسب مختصات نقطه و خواص ابتدا و انتها (۲جزء تشکیل‌دهندهٔ مادهٔ تابعی مدرج) تعریف می‌شود. از بین مدل‌های مختلفی که برای توزیع خواص در مواد تابعی مدرج وجود دارد، مدل نمایی که در اکثر مطالعات استفاده می‌شود، انتخاب می‌شود. همچنین به‌منظور بررسی تأثیر تخلخل در تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار، مدل توزیع غیریکنواخت و نامتقارن تخلخل در ترکیب با مدل نمایی انتخاب می‌شود. بدین ترتیب چگالی و مدول یانگ $p(z)$ و $E(z)$ که در جهت ضخامت تیر تغییر می‌کند، به‌صورت رابطهٔ (۱) نمایش داده می‌شود [1, 2, 11, 33, 35].

$$\rho(z) = \rho_0 e^{\beta z} \qquad E(z) = E_0 e^{\beta z} \tag{۱}$$

که در آن β شاخص گرادایان تغییرات مادهٔ مدرج تابعی است و به‌صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\beta = \frac{1}{h} \mathrm{Ln} \frac{E_1}{E_2} \tag{۲}$$

E_1 و E_2 مدول الاستیک در لایهٔ بالایی و پایینی تیر هستند. E_0 و ρ_0 مدول یانگ و چگالی تیر در لایهٔ وسط تیر هستند. در شکل (۱) تیر تابعی مدرج نمایی ترک‌دار نشان داده شده است. L و h نمایانگر طول و ضخامت تیر هستند و یک ترک باز لبه به عمق a در محل L_1 از سمت چپ تیر واقع شده است [33]. همان‌طور که در شکل (۲) نشان داده شده، به‌منظور مدل‌سازی ترک لبه در تیر از فنر پیچشی بدون جرم با سفتی پیچشی K_T استفاده شده است که ۲قسمت جداشده در اثر ترک را در محل ناپیوستگی به‌هم متصل می‌کند.

سفتی پیچشی فنر به‌صورت ذیل در نظر گرفته می‌شود:

$$K_T = \frac{1}{G} \tag{۳}$$

که در آن G انعطاف‌پذیری پیچشی در محل ناپیوستگی بوده و باتوجه‌به تئوری مکانیک شکست و فاکتور شدت تنش به‌صورت ذیل بیان می‌شود:

$$G = \int_0^{\xi} \frac{72\pi(1-\upsilon^2)\,\xi F^2(\xi)}{E h^2} d\xi \tag{۴}$$

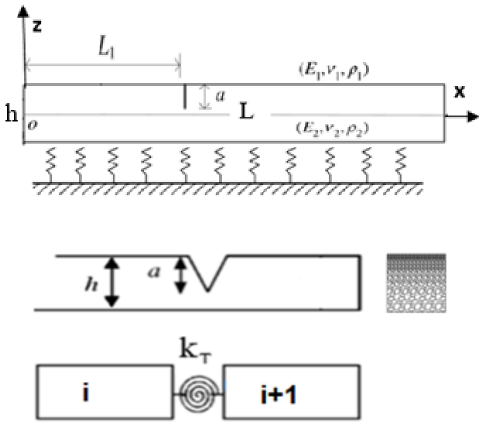
که در آن υ ضریب پواسون بوده و ثابت در نظر گرفته می‌شود و $\zeta = \frac{a}{h}$ نسبت عمق ترک به ارتفاع تیر است.

همچنین تابع $F(\xi)$ برای نسبت‌های مختلف مدول یانگ $\frac{E_2}{E_1}$ به‌صورت ذیل استخراج می‌شود [33-35].

$$E_2/E_1 = 0.2 : F(\xi) = 1.910 - 2.752\xi - 4.742\xi^2 + 146.776\xi^3 - 770.750\xi^4 + 1947.830\xi^5 - 2409.170\xi^6 + 1177.980\xi^7 \quad (۵)$$

$$E_2/E_1 = 1 : F(\xi) = 1.150 - 1.662\xi + 21.667\xi^2 - 192.451\xi^3 + 909.375\xi^4 - 2124.310\xi^5 + 2395.830\xi^6 - 1031.750\xi^7 \quad (۶)$$

$$E_2/E_1 = 5 : F(\xi) = 0.650 - 0.859\xi + 12.511\xi^2 - 72.627\xi^3 + 267.910\xi^4 - 535.236\xi^5 + 545.139\xi^6 - 211.706\xi^7 \quad (۷)$$



شکل۲ مدل ترک عرضی باز لبه و
توزیع تخلخل در تیر مدرج تابعی نمایی

اگر ترک در فاصله x_i از سمت چپ تیر وجود داشته باشد، جابه‌جایی محوری، جابه‌جایی عرضی، نیروی عمود بر سطح مقطع، مومان خمشی، نیروی برشی و شیب تیر در المان i و i+1 که محل ناپیوستگی است، باید شرایط زیر را ارضا کند [35]:

$$\begin{aligned} U_i(x_i) &= U_{i+1}(x_{i+1}) \\ W_i(x_i) &= W_{i+1}(x_{i+1}) \\ N_i(x_i) &= N_{i+1}(x_{i+1}) \\ M_i(x_i) &= M_{i+1}(x_{i+1}) \\ Q_i(x_i) &= Q_{i+1}(x_{i+1}) \\ W_i'(x)_i &= W_{i+1}'(x_{i+1}) + C_i M_i(x_i) \end{aligned} \quad (۸)$$

که در این رابطه C_i همان سفتی پیچشی فنر یا K_T است. برای نمایش تخلخل توزیع‌های متفاوتی در سطح مقطع تیر می‌توان در نظر گرفت که بر اساس مدل‌های ریاضی و نوع مدل تیر مدرج تابعی انتخاب می‌شوند، مانند مدل توزیع یکنواخت زوج و فرد [36]. در اینجا باتوجه‌به مدل نمایی در نظر گرفته شده برای توزیع مدول الاستیسیته و چگالی در تیر مدرج تابعی، مدل توزیع غیریکنواخت و نامتقارن تخلخل مطابق شکل (۲) برای این تیر در ترکیب با مدل نمایی در نظر گرفته می‌شود که کمتر در مقالات استفاده شده است. این توزیع تخلخل به فرم زیر است [37].

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho_1\left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ E(z) &= E_1\left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned} e_0 &= 1 - \frac{E_2}{E_1} \\ e_m &= 1 - \sqrt{1 - e_0} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

بنابراین با جاگذاری روابط (۹ و ۱۰) در روابط (۱ و ۲)، معادلهٔ ریاضی تیر نمایی در نظر گرفته شده با لایهٔ بالایی فلز و لایهٔ پایینی سرامیک و توزیع تخلخل غیرمتقارن در ترکیب با مدل نمایی تیر به‌صورت ذیل استخراج می‌شود:

$$\rho(z)=\rho_m \exp\left[\left(\frac{z}{h}\ln(\frac{E_c}{E_m})\right)\right]\left[\begin{array}{l}1-e_m\cos(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\\+\frac{\pi}{4})\end{array}\right]$$

$$E(z)=E_m \exp\left[\left(\frac{z}{h}\ln(\frac{E_c}{E_m})\right)\right]\left[\begin{array}{l}1-e_0\cos(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\\+\frac{\pi}{4})\end{array}\right]$$

(۱۱)

که در آن E_mو E_c به ترتیب مدول الاستیسیته لایهٔ فلز و سرامیک ا ست و ρ_m و ρ_c نیز به‌ترتیب چگالی لایهٔ فلز و سرامیک است و ضریب e_m به‌صورت نرمال‌شده عبارت است از:

$$e_m=\frac{1-\sqrt{1-e_0\cos(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}+\frac{\pi}{4})}}{\cos(\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}+\frac{\pi}{4})} \quad (۱۲)$$

معادلات حرکتی حاکم. برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی و استاتیکی تیرها تئوری‌های متفاوتی وجود دارد. هرکدام از این تئوری‌ها مبتنی بر فرضیات، مزایا، محدودیت‌ها و کاربردهایی هستند. ازجمله شناخته‌شده‌ترین تئوری‌های موجود می‌توان به تئوری تیر کلاسیک که با نام تئوری تیر اویلر برنولی نیز شناخته می‌شود، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌اول که با نام تئوری تیر تیموشنکو نیز شناخته می‌شود و تئوری‌های مرتبه‌بالای برشی مانند تئوری برشی مرتبه‌سوم که به‌نام تئوری تیر ردی نیز شناخته می‌شود، اشاره کرد که برای تیرهای ضخیم به کار می‌رود [21].

تئوری برشی مرتبه‌سوم ردی. برای مدل‌سازی ارتعاشی تیرهای ضخیم باید از تئوری‌های دقیق‌تر از تئوری اویلر برنولی و تیموشنکو استفاده کرد که حجم محاسبات و پیچیدگی روابط آن نیز بیشتر است و فاکتور تصحیح برش حذف می‌شود. ازجمله مهم‌ترین تئوری‌های برشی مراتب بالاتر می‌توان به تئوری برشی مرتبه‌سوم ردی اشاره کرد. در این تئوری بر خلاف تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه‌اول، سطح مقطع تیر دیگر به‌صورت سطح صاف در نظر گرفته نمی‌شود. میدان جابه‌جایی در این تئوری با فرضیاتی همراه است. ۱) جابه‌جایی‌های طولی و عرضی به ۲مؤلفه خمشی و برشی تقسیم می‌شوند. ۲) مؤلفه خمشی از جابه‌جایی طولی شبیه مؤلفه تئوری برنولی است. ۳) مؤلفه برشی از جابه‌جایی طولی به‌گونه‌ای به تغییرات مرتبه‌سه کرنش برشی در ضخامت تیر افزایش می‌یابد که تنش برشی در سطوح بالا و پایین تیر صفر می‌شود. بر اساس این فرضیات میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر بیان می‌شود [21]:

$$\begin{aligned}U(x,z,t)&=u(x,t)-z\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\\&-f(z)\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\\W(x,z,t)&=w_b(x,t)+w_s(x,t)\end{aligned} \quad (۱۳)$$

که در آن U، w_b و w_s به‌ترتیب معرف جا به جایی طولی، خمشی و برشی تیر در یک نقطه از صفحهٔ میانی تیر هستند. تابع شکل f(z) مشخص‌کننده شکل توزیع کرنش برشی عرضی و تنش برشی در ضخامت تیر است که شرایط مرزی تنش صفر را در سطوح بالا و پایین تیر ارضا می‌کند. بر اساس تئوری مرتبه‌سوم برشی تیر ردی، تابع شکل f(z) به صورت زیر بیان می شود [1]:

$$f(z)=\frac{4z^3}{3h^2} \quad (۱٤)$$

استخراج معادلات حاکم ارتعاشات تیر برمبنای تئوری تغییر شکل مرتبه‌سوم ردی. در استخراج معادلات حاکم فرضیات زیر لحاظ شده است: الف) تغییر شکل‌های کوچک. ب)وجود بارگذاری حرارتی با دمای ثابت. بر اساس میدان جابه‌جایی در نظر گرفته شده در این تئوری می‌توان کرنش‌ها و در نتیجه تنش‌ها را در تیر به‌صورت زیر استخراج کرد.

$$\sigma_{xx}=E\left(x,z\right)\begin{pmatrix}-z\dfrac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x^2}\\ -f\left(z\right)\dfrac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x^2}\\ +\dfrac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\end{pmatrix} \qquad (۱۵)$$

$$\sigma_{xz}=G\left(x,z\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial w_s\left(x,t\right)}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial f\left(z\right)}{\partial z}\dfrac{\partial w_s\left(x,t\right)}{\partial x}\end{pmatrix}$$

همچنین با استفاده از اصل همیلتن، معادلات حاکم ارتعاشات آزاد تیر دوجهته قابل استخراج است.

$$\int_{t1}^{t2}(\delta K-\delta U-\delta V_{ef})dt=0 \qquad (۱۶)$$

که در آن t پارامتر زمان است و t_1 و t_2 به‌ترتیب زمان‌های اولیه و نهایی هستند. همچنین δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δV_{ef} تغییرات انرژی پتانسیل بستر الاستیک است. باتوجه‌به میدان جا به جایی معرفی شده و تنش و کرنش استخراج شده در فرمول(۱۵)، انرژی کرنشی به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{xz}\varepsilon_{xz})\,dAdx$$

$$U=\int_{-L/2}^{L/2}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}A_s\left(\frac{\partial w_s\left(x,t\right)}{\partial x}\right)^2+\\ \frac{1}{2}A\left(\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\right)^2\\ -B\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x^2}+\\ D_s\frac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x^2}+\\ \frac{1}{2}D\left(\frac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right)^2\\ -B_s\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\frac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x^2}\\ +\frac{1}{2}H_s\left(\frac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x^2}\right)^2\end{array}\right]dx$$

(۱۷)

انرژی جنبشی به صورت زیر معرفی می شود که باتوجه‌به میدان جابه‌جایی معرفی شده در معادلهٔ (۱۳) می‌توان انرژی جنبشی را به صورت رابطهٔ (۱۸) استخراج کرد.

$$K=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A\rho(z)(\dot{U}^2+\dot{W}^2)dAdx$$

$$K=\int_{-L/2}^{L/2}\left[\begin{array}{l}J_2\frac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x\,\partial t}-\\ \mathcal{I}_1\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\frac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x\,\partial t}+\\ \frac{1}{2}\mathcal{I}_2\left(\frac{\partial^2 w_b\left(x,t\right)}{\partial x\,\partial t}\right)^2\\ -J_1\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\frac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x\,\partial t}\\ +\frac{1}{2}K_2\left(\frac{\partial^2 w_s\left(x,t\right)}{\partial x\,\partial t}\right)^2\\ +\mathcal{I}_0\frac{\partial w_b\left(x,t\right)}{\partial t}\frac{\partial w_s\left(x,t\right)}{\partial t}+\\ \frac{1}{2}\mathcal{I}_0\left(\frac{\partial w_b\left(x,t\right)}{\partial t}\right)^2+\\ \frac{1}{2}\mathcal{I}_0\left(\frac{\partial w_s\left(x,t\right)}{\partial t}\right)^2+\\ \frac{1}{2}\mathcal{I}_0\left(\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\right)^2\end{array}\right]dx \qquad (۱۸)$$

انرژی پتانسیل بستر الاستیک به‌صورت زیر معرفی می‌شود که درآن k_w و k_g به‌ترتیب ثابت‌های الاستیک وینکلر و لایهٔ برشی بستر هستند که به خصوصیات بستر و خاک، مانند طول خاک، مدول الاستیک و ضریب پواسون خاک وابسته هستند.

باتوجه‌به میدان جابه‌جایی معرفی‌شده انرژی پتانسیل بستر به فرم (۱۹) استخراج می‌شود.

$$V_{ef} = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^b \left[k_w W^2 + k_g \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \right]_{z=0} dydx$$

$$\begin{aligned} V_{ef} = \int_{-L/2}^{L/2} \Bigg[& K_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2}K_g\left(\frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x}\right)^2 \\ & + K_w w_b(x,t) w_s(x,t) \\ & + \frac{1}{2}K_w w_b(x,t)^2 + \\ & \frac{1}{2}K_g\left(\frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \\ & \frac{1}{2}K_w w_s(x,t)^2 \Bigg] dx \end{aligned}$$

(۱۹)

با جاگذاری معادلات (۱۹ – ۱۷) در معادلهٔ (۱٦) و انتگرال‌گیری جزبه‌جز با در نظر گرفتن متغیرهای زمان و مکان، معادلات متشکلهٔ تیر مدرج تابعی به فرم زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta u: \; & A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - B\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - B_s\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} \\ & = \mathcal{I}_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_1\frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} \\ & -J_1\frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} \end{aligned}$$

(۲۰)

$$\begin{aligned} \delta w_b: \; & K_g\left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right) - D\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} \\ & -K_w\left(w_b(x,t) + w_s(x,t)\right) + B\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \\ & -D_s\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4} \\ & = \mathcal{I}_0\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \mathcal{I}_2\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} \\ & -J_2\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} + \mathcal{I}_1\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} \\ & +\mathcal{I}_0\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(۲۱)

$$\begin{aligned} \delta w_s: \; & K_g\left(\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2}\right) - D_s\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^4} \\ & -K_w\left(w_b(x,t) + w_s(x,t)\right) + B_s\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \\ & -H_s\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^4} + A_s\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} \\ & = \mathcal{I}_0\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - J_2\frac{\partial^4 w_b(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} \\ & +J_1\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\,\partial t^2} + \mathcal{I}_0\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial t^2} \\ & -K_2\frac{\partial^4 w_s(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} \end{aligned}$$

(۲۲)

همچنین شرایط مرزی به قرار ذیل استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} & u = 0 \quad or \quad -A\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \\ & B\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + B_s\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad or \quad -D_s\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \\ & B_s\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - H_s\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \qquad (۲٤)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \quad or \quad -D\frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial x^2} + \\ & B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D_s\frac{\partial^2 w_s(x,t)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

$$w_s = 0 \quad or \quad J_2 \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + K_2 \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} - A_s \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - \mathrm{K}_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D_s \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - B \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mathrm{K}_g \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - J_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \mathrm{H}_s \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} = 0 \tag{۲۶}$$

$$w_b = 0 \quad or \quad \mathcal{I}_2 \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x \partial t^2} + J_2 \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x \partial t^2} - \mathrm{K}_g \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial x} - D \frac{\partial^3 w_b(x,t)}{\partial x^3} - B \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mathrm{K}_g \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} - B_s \frac{\partial^3 w_s(x,t)}{\partial x^3} - \mathcal{I}_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{۲۷}$$

برای آنالیز ارتعاشات آزاد تیر، روش حل زیر برای مؤلفه‌های جابه‌جایی در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathrm{u(x,t)} = \bar{\mathrm{u}}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{iwt}}, \ \mathrm{w_b(x,t)} = \bar{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{iwt}}, \ \mathrm{w_s(x,t)} = \bar{\mathrm{w}}_{\mathrm{s}}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{iwt}} \tag{۲۸}$$

که در آن $i=\sqrt{-1}$ و w فرکانس طبیعی تیر است.

گسسته‌سازی معادلات به فرم مربعات دیفرانسیلی. در این مرحله معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوط، با روش DQ به فرم معادلات جبری تبدیل می‌شوند. باتوجه‌به قوانین گسسته‌سازی و معادلات (۲۰ – ۲۲) و (۲۳ – ۲۸)، معادلات متشکله و شرایط مرزی به فرم DQ نمونهٔ (۳۱) استخراج می‌شوند که در آن N تعداد نقاط گسسته‌سازی و $\mathrm{A_i}$، $\mathrm{B_i}$، $\mathrm{C_i}$ و $\mathrm{D_i}$ به‌ترتیب ثابت‌های وزن درجه‌یک، دو، سه و چهار روش مربعات دیفرانسیلی هستند که از توابع چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ به‌دست می‌آیند [32, 38]. در این مقاله جهت گسسته‌سازی از روش توزیع غیریکنواخت چبیشف–گوس– لوباتو به فرم (۲۹) استفاده شده که مزیت آن نسبت به سایر روش‌های توزیع نقاط این است که تجمع نقاط در نواحی مرزی بیشتر از نواحی میانی دامنه خواهد بود که دقت نتایج را بالا می‌برد [32, 38]. ثابت‌های دیگر تعریف‌شده به فرم (۳۰) است.

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1-\cos(\frac{i-1}{N-1}\pi)\right]; \quad i=1,2,\ldots N \tag{۲۹}$$

$$(A(x), B, D, B_s, D_s, H_s) = \iint \mathrm{E}(x,z)(1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) dA$$
$$(\mathcal{I}_0(x), \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, J_1, J_2, K_2) = \iint \rho(x,z)(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dA \tag{۳۰}$$

$\delta u:$

$$A_i \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{u}_j - B_i \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \bar{w}_{bj} - B_{si} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \bar{w}_{sj} = \mathcal{I}_{0i} \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \mathcal{I}_{1i} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \frac{d^2 w_{bj}}{dt^2} - J_{1i} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \frac{d^2 w_{sj}}{dt^2} \tag{۳۱}$$

همچنین باتوجه‌به رابطه (۲۸) فرم DQ شرایط مرزی استخراج‌شده در معادلات (۲۳ – ۲۷) به فرم (۳۲– ۳۶) قابل بیان است.

$$u = 0 \ \ or \quad A_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \bar{u}_j - B_i \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{w}_{bj} - B_{si} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{w}_{sj} = 0 \tag{۳۲}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \ \ or \quad B_{si} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \bar{u}_j - H_{si} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{w}_{sj} - D_{si} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{w}_{bj} = 0 \tag{۳۳}$$

$$\frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \ \ or \quad B_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \bar{u}_j - D_{si} \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{w}_{sj} - D_i \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \bar{w}_{bj} = 0 \tag{۳۴}$$

$$w_s = 0 \quad or$$
$$A_{si}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\bar{w}_{sj} + K_g\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\bar{w}_{bj} + D_{si}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\bar{w}_{bj}$$
$$-B_{si}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\bar{u}_j + H_{si}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\bar{w}_{sj} + K_g\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\bar{w}_{sj}$$
$$= J_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2u_j}{dt^2} - J_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}$$
$$-K_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}$$
(۳۵)

$$w_b = 0 \quad or$$
$$K_g\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\bar{w}_{bj} + D_i\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\bar{w}_{bj}$$
$$-B_i\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\bar{u}_j + D_{si}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}\bar{w}_{sj}$$
$$+K_g\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\bar{w}_{sj}$$
$$=\mathcal{I}_{1i}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\frac{d^2u_j}{dt^2} - \mathcal{I}_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{bj}}{dt^2}$$
$$-J_{2i}\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\frac{d^2w_{sj}}{dt^2}$$
(۳۶)

برای تشکیل مقادیر ویژهٔ سیستم معادلات، درجات آزادی به ۲قسمت درجات آزادی دامنه و مرز (باندری) به فرم (۳۷) تقسیم می‌شود.

$$\{d\} = \begin{Bmatrix}\{\bar{u}\}\\ \{\bar{w}_b\}\\ \{\bar{w}_s\}\end{Bmatrix} \qquad , \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix}\{\bar{u}\}\\ \{\bar{w}_b\}\\ \{\bar{w}_s\}\end{Bmatrix} \qquad (۳۷)$$

با استفاده از معادلهٔ (۳۷) فرم گسسته معادلات حرکت به‌حالت ماتریسی را به فرم معادلهٔ (۳۸) می‌توان نوشت

$$[S_{db}]\{b\} + [S_{dd}]\{d\} - w_i^2[M]\{d\} = 0 \qquad (۳۸)$$

که در آن $[S_{dd}]$, $[S_{db}]$ ماتریس‌های سفتی هستند و [M] ماتریس جرم است. به همین ترتیب فرم گسسته شرایط مرزی به‌صورت (۳۹) بازنویسی می‌شود.

$$[S_{bb}]\{b\} + [S_{bd}]\{d\} = 0 \qquad (۳۹)$$

که در آن $[S_{bb}]$, $[S_{bd}]$ماتریس‌های سفتی هستند. با به‌کاربردن معادلهٔ (۳۹) در معادلهٔ (۳۸) ماتریس درجات آزادی $\{b\}$ حذف می شود و نتیجه به فرم (۴۰) استخراج می‌شود.

$$([S] - w_i^2[M])\{d\} = 0 \qquad (۴۰)$$

که در آن $[S] = [S_{dd}] - [S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}]$

با حل‌کردن معادلهٔ (۴۰) فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی به‌دست می‌آید.

نتایج

در این بخش به‌منظور استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی نمایی روی بستر الاستیک، ابتدا رفتار همگرایی روش حل را بررسی شد و سپس برای مشخص‌کردن دقت جواب‌ها و صحت نتایج، مقایسه با مقالات دیگران را مدنظر قرار می‌گیرد. ابتدا به‌منظور صحت‌سنجی نتایج در جداول (۲و۳) از تیر فولادی ایزوتروپیک با مشخصات E=۲۱۰Gpa و Kg/m3 ρ=۷۸۵۰ مطابق مرجع [39] استفاده شده است. سپس در استخراج کردارها از تیر مدرج تابعی نمایی که دارای مشخصات فلز آلومینیم در لایهٔ بالایی تیر به مشخصات E_1 =۷۰Gpa ، ρ_1 =۲۷۸۰ و υ_1 = ۰/۳۳ و سرامیک در لایهٔ پایینی تیر است، مطابق مرجع [10] استفاده شده است.

در بررسی‌های این تحقیق فرکانس طبیعی بی‌بعدشده به‌صورت (w) و به فرم (۴۱) تعریف می‌شود.

$$\mathrm{w} = \frac{\mathrm{w_n L^2}}{\mathrm{h}}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \qquad (۴۱)$$

که ρ_m چگالی و E_m مدول الاستیسیته لایهٔ فلز است. همچنین ثابت‌های الا ستیک بی‌بعد مربوط به بستر

به فرم (۴۲) مشخص می‌شوند.

$$K_w = \frac{k_w L^4}{E_0 I} \quad , \quad K_g = \frac{k_0 L^2}{\pi^2 E_0 I} \tag{۴۲}$$

که پارامتر I به‌صورت (۴۳) تعریف می‌شود:

$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{۴۳}$$

در تمام حالت‌های برر سی شده رفتار همگرایی بر ا ساس تعداد نقاط روش DQ در را ستای طول تیر برر سی شده‌اند. در جدول (۱) به‌عنوان نمونه رفتار همگرایی فر کانس طبیعی تیر مدرج تابعی ن مایی ترک‌دار در شرایط تکیه‌گاهی گیردار نشان داده شده‌اند. در این جدول نشان داده شده که برای N=۱۵ همگرایی جواب‌ها به‌دست آمده است.

جدول ۱ همگرایی فرکانس اول بی‌بعد تیر ترک‌دار در وسط برای شرایط مرزی تکیه‌گاهی گیردار و نسبت‌های طول به ضخامت مختلف (Kw=Kg=0, E2/E1=5, a/h=0.25)

طول به ضخامت	فرکانس بی‌بعد	تعداد گره‌های دامنه x N			
L/h	wc	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷
۵	۱	۹/۳۰۷۱	۹/۳۰۶۸	۹/۳۰۶۷	۹/۳۰۶۷
۱۰	۱	۹/۸۱۹۱	۹/۸۱۸۹	۹/۸۱۸۸	۹/۸۱۸۸

در جدول (۲) اثرات نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و پارامترهای بستر الاستیک در نظر گرفته شده‌اند. نتایج برای تیر ایزوتروپیک همگن بدون ترک روی بستر الاستیک استخراج شده و با مرجع [21] مقایسه شده‌اند که تطابق بالا در جواب‌ها مشاهده می‌شود.

درجدول (۳) نسبت فرکانسی اول بی‌بعد برای تیر ایزوتروپیک همگن ترک‌دار در شرایط مرزی مختلف استخراج شده و با مرجع [15] مقایسه شده‌اند که تطابق بالا در جواب‌ها مشاهده می‌شود.

علت اختلاف جواب‌ها در این جدول استخراج جواب‌ها از تئوری مرتبه‌سوم ردی است. منظور از w1/w10 نسبت فرکانس بی‌بعد تیر ترک‌دار به فرکانس بی‌بعد تیر بدون ترک است.

جدول ۲ مقایسهٔ فرکانس‌های اول بی‌بعد تیر ایزوتروپیک بدون ترک با شرایط مرزی SS ساده تحت اثر ثابت‌های مختلف بستر الاستیک

	منبع	Kg		
l/h	–	Kw	۰	۱
۵	مرجع [21]	۰	۹/۲۷۴	۱۳/۴۴۷
	کار حاضر		۹/۲۷۴	۱۳/۴۴۷
	مرجع [21]	۱۰	۹/۷۸۵	۱۳/۸۰۴
	کار حاضر		۹/۷۸۵	۱۳/۸۰۴
	مرجع [21]	۱۰۰۰	۳۲/۵۳۷	۳۳/۹۶۰
	کار حاضر		۳۲/۵۳۷	۳۳/۹۶۱
۱۰	مرجع [21]	۰	۹/۷۰۷	۱۳/۸۱۶
	کار حاضر		۹/۷۰۷	۱۳/۸۱۶
	مرجع [21]	۱۰	۱۰/۲۰۵	۱۴/۱۷۰
	کار حاضر		۱۰/۲۰۵	۱۴/۱۷۰
	مرجع [21]	۱۰۰۰	۳۲/۹۶۱	۳۴/۳۹۶
	کار حاضر		۳۲/۹۶۱	۳۴/۳۹۶

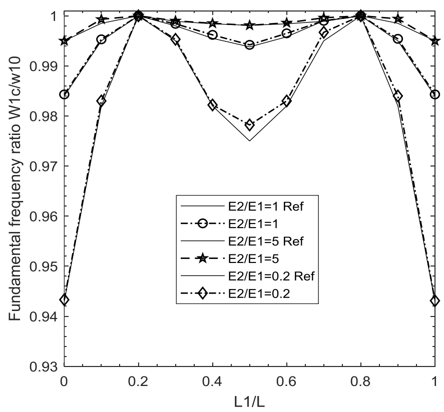
در ادامه به‌منظور بررسی بیشتر، نسبت فرکانس بی‌بعد اول تیر ترک‌دار برای ۳نسبت مدول یانگ متفاوت و طول به ضخامت ۱۰، در شکل (۳) آورده شده‌اند.

جدول ۳ مقایسهٔ نسبت فرکانسی اول بی‌بعد (w1/w10) تیر ایزوتروپیک همگن با یک ترک عرضی لبه در موقعیت‌های طولی مختلف به عمق a/h=0.2 در شرایط مرزی مختلف

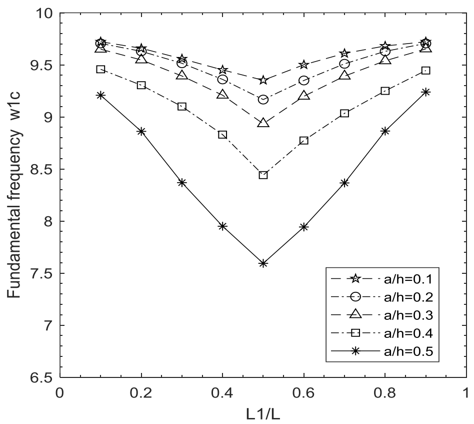
شرایط مرزی	منبع	x1/L=0.2	x1/L=0.4	x1/L=0.6
Cantilever	مرجع [15]	۰/۹۹۰۶	۰/۹۹۶	۰/۹۹۸۲
	کار حاضر	۰/۹۹۴	۰/۹۹۷	۰/۹۹۸۵
		x1/L=0.1	x1/L=0.3	x1/L=0.4
Clamped-Clamped	مرجع [15]	۰/۹۹۷	۰/۹۹۶	۰/۹۹۴
	کار حاضر	۰/۹۹۷	۰/۹۹۲	۰/۹۹۵
		x1/L=0.2	x1/L=0.4	x1/L=0.7
Simply Support	مرجع [15]	۰/۹۹۶	۰/۹۹۱۶	۰/۹۹۸
	کار حاضر	۰/۹۹۷	۰/۹۹۲	۰/۹۹۶

در این شکل تأثیر نسب مدول یانگ و موقعیت طولی ترک عرضی لبه بر نسبت فرکانس تیر ترک‌دار دیده می‌شود که تطابق خوبی با کردار مرجع [11] دارد. دلیل اختلاف مشاهده‌شده استفاده از تئوری برشی مرتبه‌سوم ردی در این تحقیق است که دقت بالاتری را نشان می‌دهد.

در این شکل منظور از w1c/w10 نسبت فرکانس بی‌بعد تیر ترک‌دار به فرکانس بی‌بعد تیر بدون ترک است و w1c نمایانگر فرکانس بی‌بعد تیر ترک‌دار است.

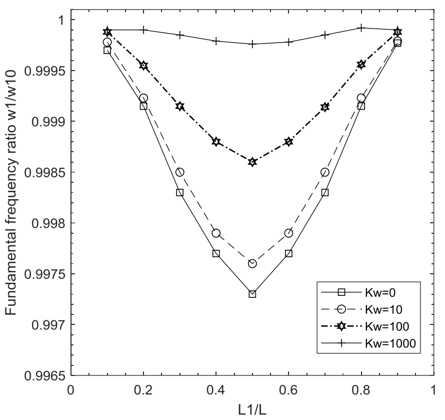


شکل ۳ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر با l/h=۱۰ و تغییر موقعیت طولی ترک برای شرایط مرزی دوسر گیردار و نسبت تغییرات مواد مختلف

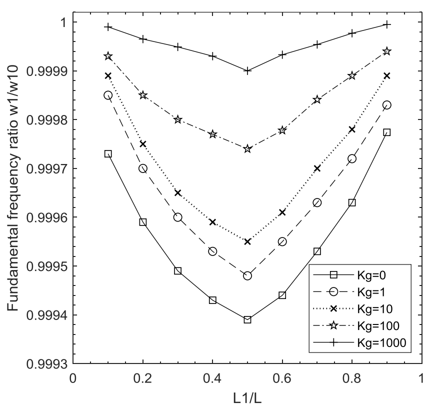


شکل ٤ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر ترک‌دار ایزوتروپیک شرایط مرزی ساده و نسبت لاغری l/h=۵ با تغییر عمق ترک a/h

(الف)



(ب)



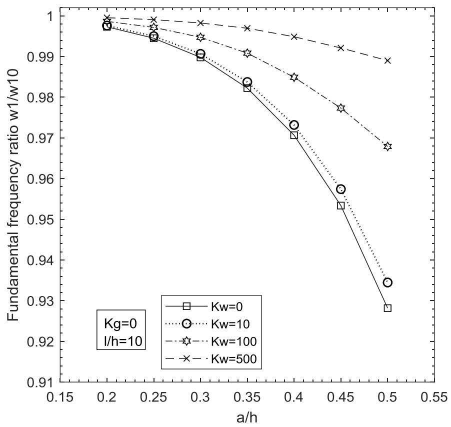
شکل ۵ اثر ثابت‌های بستر الاستیک بر تغییرات نسبت فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر مدرج تابعی ترک‌دار با شرایط مرزی ساده E2/E1 =۵ و a/h=۰/۲ با تغییر موقعیت طولی ترک الف) تأثیر وینکلر Kw ب) تأثیر لایهٔ برشی Kg

در شکل (٤) تأثیر عمق و موقعیت طولی ترک لبه بر فرکانس بی‌بعد پایه تیر ترک‌دار آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش عمق ترک لبهٔ فرکانس بی‌بعد تیر کاهش می‌یابد. در واقع با افزایش عمر ترک میزان سفتی تیر کاهش می‌یابد.

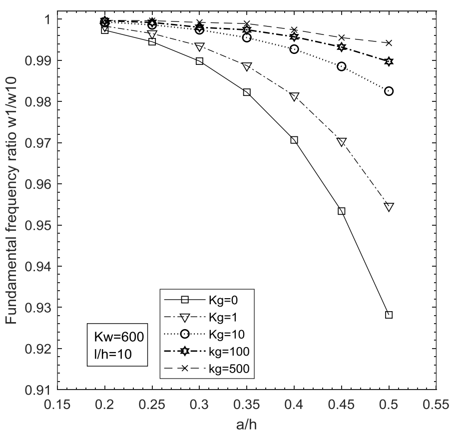
در شکل (۵- الف و ب) اثرات ضریب بستر الاستیک و موقعیت طولی ترک لبه بر نسبت فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر مدرج تابعی برای شرایط مرزی گیردار نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت فرکانسی تیر مدرج تابعی با تغییر موقعیت ترک روند کاهشی دارد و مینیمم مقدار را در موقعیت میانی

تیر دارد. از سوی دیگر، با افزایش ضریب برشی و ضریب وینکلر بستر، نسبت فرکانسی تیر ترک‌دار، به‌دلیل افزایش سفتی کل سازه افزایش می‌یابد. در این راستا همان‌طور که از کردار پیداست اثر ضریب وینکلر بستر نسبت به ضریب برشی در افزایش سفتی کل تیر کمتر است و نهایتا مجموع اثرات ضرایب برشی و الاستیک بستر در افزایش سفتی و فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار نقش بسزایی دارند.

(الف)



(ب)

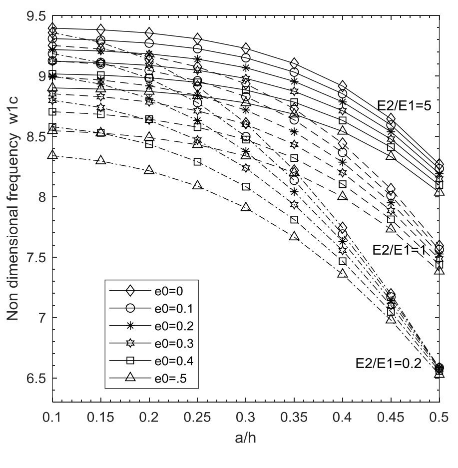


شکل ٦ اثر ثابت‌های بستر الاستیک بر تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر مدرج تابعی ترک‌دار E2/E1=۵ با تغییر عمق ترک a/h در وسط تیر الف) تأثیر Kw ب)تأثیر Kg

در شکل (٦ -الف و ب) کردار تغییرات نسبت فرکانسی تیر مدرج تابعی بر حسب عمق ترک در وسط تیر برای ضریب لایۀ برشی و ضریب لایۀ وینکلر استخراج شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش عمق ترک نسبت فرکانسی تیر مدرج تابعی به‌دلیل کاهش سفتی سیستم، کاهش یافته است.

با افزایش ضرایب بستر، به‌دلیل افزایش سفتی سیستم، نسبت فرکانس بی‌بعد تیر افزایش می‌یابد. در این کردار هم ملاحظه می‌شود اثر ضریب لایۀ برشی بستر در افزایش نسبت فرکانس سیستم از اثر ضریب وینکلر بیشتر است.

در شکل (۷) تأثیر هم‌زمان عمق ترک و تخلخل بر فرکانس بی‌بعد پایۀ تیر ترک‌دار مدرج تابعی استخراج شده است. در اثر افزایش ضریب تخلخل فرکانس بی‌بعد تیر ترک‌دار کاهش چشمگیری دارد که این کاهش زمانی که ترک در سطح تیر مدرج تابعی است کاملا نمایان است، ولی با افزایش عمق ترک، تأثیر کمتری دارد.



شکل۷ تأثیر تخلخل بر فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر ترک‌دار مدرج تابعی مختلف شرایط مرزی ساده و l/h=۵ با تغییر عمق ترک a/h در وسط تیر

نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل فرکانسی تیرهای مدرج تابعی ترک‌دار با شرایط مرزی مختلف بررسی شده و با استفاده از تئوری مرتبه‌سوم برشی ردی در اصل همیلتون،

استخراج معادلات حرکتی تیر انجام شد و پس از گسسته‌سازی معادلات و شرایط مرزی، دستگاه معادلات جبری تولیدشده با به‌کارگیری روش عددی مربعات دیفراسیلی تعمیم‌یافته حل شد. برای مدل‌سازی ترک لبه از مدل فنر بدون جرم پیچشی با شرایط مرزی نشان داده شده استفاده شد. اثر پارامترهای مختلف ازجمله نسبت مدول الاستیسیته، موقعیت طولی ترک لبه، افزایش عمق ترک لبه، ضرایب بستر الاستیک و تخلخل بر فرکانس بی‌بعد اول و نسبت فرکانسی تیر بررسی شد. نتایج با نتایج کارهای دیگران مقایسه شد و تطابق قابل قبولی به‌دست آمد.

ملاحظه شد در تیرهای نسبتا ضخیم و ضخیم تئوری برشی مرتبه‌سوم ردی به‌دلیل پرهیز از استفاده از فاکتور اصلاح برش، نتایج دقیق‌تری استخراج می‌شود.

با تغییر موقعیت طولی ترک نسبت فرکانسی تیر رو به کاهش بوده و مینیمم مقدار در وسط تیر اتفاق می‌افتد. همچنین با افزایش نسبت مدول الاستیسته نسبت فرکانسی به‌دلیل افزایش سفتی تیر افزایش می‌یابد.

با افزایش عمق ترک لبه، فرکانس بی‌بعد تیر ترک‌دار کاهش چشمگیری دارد. در صورتی که با افزایش ضرایب بستر الاستیک، به‌دلیل افزایش سفتی سیستم، نسبت فرکانسی تیر افزایش می‌یابد که در این حالت اثر ضریب لایهٔ برشی در افزایش فرکانس تیر به‌مراتب از ضریب وینکلر بیشتر است. همچنین با افزایش ضریب تخلخل فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر ترک‌دار به‌دلیل کاهش سفتی تیر، کاهش چشمگیر می‌یابد که تأثیر آن در ترک‌های کم‌عمق بیشتر است.

بنابراین با استفاده از این تأثیرات و انتخاب مناسب ضرایب بستر الاستیک می‌توان اثرات کاهش فرکانس ترک لبه در عمق‌های مختلف را جبران کرد و هم‌زمان با انتخاب مناسب ضریب تخلخل، این اثرات را متعادل کرد. نتایج و خروجی این مقاله در تجهیزات پیش‌بینی، پیدایش، کشف و کنترل ترک در سازه‌های مدرج تابعی و در طراحی بهینهٔ این سازه‌ها می‌تواند کاربرد ویژه داشته باشد.

واژه نامه

مواد مدرج تابعی	FGM
روش مربعات دیفرانسیلی	DQM
روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته	GDQM
نظریه تغییر فرم برشی ردی (مرتبه سه)	RSDBT
تئوری اویلر برنولی تیرها	EBT
نظریه تیموشنکو تیرها	TBT
نظریه تغییر فرم برشی مراتب بالاتر	HBT
تخلخل و حفره در ساختار تیرها	Porosity
ثابت الاستیک بستر	Elastic Foundation
ثابت وینکلر	Winkler Foundation
سفتی پیچشی فنر	C_i
نسبت عمق ترک به عمق تیر	$\zeta = \frac{a}{h}$
ارتفاع یا عمق تیر	h
طول تیر	L
مساحت تیر	A
مدول الاستیسیته در لایه بالایی تیر	E_1
مدول الاستیسته در لایه پایینی تیر	E_2
مدول الاستیسته در لایه میانی تیر	E_0
ضریب تخلخل تیر	e_0
ضریب تخلخل نرمالایز شده تیر	e_m
چگالی تیر	ρ

مراجع

1. Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y. and Jia, X.L., "Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load". *Journal of Sound and Vibration* , Vol. 312, pp. 166-181, (2008).
2. Yang, E.C., Zhao, X. and Li, Y.H., "Free vibration analysis for cracked FGM beams by means of a continuous beam model", *Shock and Vibration*, pp. 1-13, (2015).
3. Wei, D., Liu, Y. and Xiang, Z., "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, pp. 1686-1700, (2012).
4. Erdogan, F., and B. H. Wu., "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties.", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.64, No.3, pp. 449-456, (1997).
5. Shifrin, E.I. and Ruotolo, R., "Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks", *Journal of Sound and vibration*, Vol. 222, pp. 409-423, (1999).
6. Swamidas, A.S.J., Yang, X. and Seshadri, R., "Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.130, pp. 1297-1308, (2004).
7. Binici, B., "Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, pp. 277-295, (2005).
8. Lin, H.P. and Chang, S.C., "Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1456-1463, (2006).
9. Hsu, M.H., "Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 1-17, (2005).
10. Yang, J., Chen, Y., Xiang, Y. and Jia, X.L., "Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 312, pp. 166-181, (2008).
11. Yang, J. and Chen, Y., "Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks", *Composite Structures*, Vol. 83, pp. 48-60, (2008).
12. Matbuly, M.S., Ragb, O. and Nassar, M., "Natural frequencies of a functionally graded cracked beam using the differential quadrature method", *Applied Mathematics and computation*, Vol. 215, pp. 2307-2316, (2009).
13. Ke, L.L., Yang, J., Kitipornchai, S. and Xiang, Y., "Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol.16, pp. 488-502, (2009).

14. Ferezqi, H.Z., Tahani, M. and Toussi, H.E., "Analytical approach to free vibrations of cracked Timoshenko beams made of functionally graded materials", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 17, pp. 353-365, (2010).
15. Aydin, K., "Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 42, pp. 112-124, (2013).
16. Sherafatnia, K., Farrahi, G.H. and Faghidian, S.A., "Analytic approach to free vibration and buckling analysis of functionally graded beams with edge cracks using four engineering beam theories", *International Journal of Engineering*, Vol. 27, pp. 979-990, (2014).
17. Van Lien, T., Duc, N.T. and Khiem, N.T., "A New Form of Frequency Equation for Functionally Graded Timoshenko Beams with Arbitrary Number of Open Transverse Cracks", *Iranian Journal of Science and Technology*, Transactions of Mechanical Engineering, Vol. 43, pp. 235-250, (2019).
18. Shabani, S. and Cunedioglu, Y., "Free vibration analysis of functionally graded beams with cracks", *Journal of Applied and Computational Mechanics*, Vol. 6, pp. 908-919, (2020).

۱۹. رضایی م. و همکاران، " ارائه تابع اغتشاش ترک جدید برای آنالیز ارتعاشات عرضی تیر ترک‌دار" ، نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، د. ۲۵، ش. ۲، ص ۳۲-۱۹، (۱۳۹۳)

۲۰. علی جانی ع. و خمامی ابدی م.، " استخراج روابط صریح در تعیین فرکانس طبیعی تیر اویلر- برنولی دارای ترک روی بستر الاستیک با استفاده از روش رایلی" ، نشریه مهندسی مکانیک امیر کبیر، د. ۵۲، ش. ۵، ص ۱۰۰-۹۱، (۱۳۹۹).

21. Zahedinejad, P., "Free vibration analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation in thermal environment", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol.16, pp. 1550029-51, (2016).
22. Eisenberger, M., "Vibration frequencies for beams on variable one-and two-parameter elastic foundations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, pp. 577-84, (1994).
23. Chen WQ, Lü CF, Bian ZG., "A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 28, pp. 877-90, (2004).
24. Akbaş, Ş.D., "Free Vibration Analysis of Edge Cracked Functionally Graded Beams Resting on Winkler-Pasternak Foundation", *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, Vol. 7, pp. 1-15, (2015).
25. Baghlani, A., Khayat, M. and Dehghan, S.M., "Free vibration analysis of FGM cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation in thermal environment considering fluid-structure interaction", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 78, pp.550-575, (2020)
26. Yahia, S.A., Atmane, H.A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 53, pp. 1143-1165, (2015).

27. Ebrahimi, F. and Mokhtari, M., "Transverse vibration analysis of rotating porous beam with functionally graded microstructure using the differential transform method", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 37, pp. 1435-1444, (2015).
28. Avcar, M., "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel and Composite Structures*, Vol. 30, pp. 603-615, (2019).
29. Ramteke, P.M. and Panda, S.K., "Free Vibrational Behaviour of Multi-Directional Porous Functionally Graded Structures", *Arabian Journal for Science and Engineering*, pp. 1-16, (2021).
30. Şimşek, M., "Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 240, pp. 697-705, (2010).
31. Pradhan, K.K., Chakraverty, S., "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method", *Composites Part B Engineering*, Vol. 51, pp. 175-184, (2013).
32. Bert, CW., Malik, M., "Differential quadrature method in computational mechanics. a review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, pp. 1-28, (1996).
33. Zhu, L.F., Ke, L.L., Zhu, X.Q., Xiang, Y. and Wang, Y.S., "Crack identification of functionally graded beams using continuous wavelet transform", *Composite Structures*, Vol. 210, pp. 473-485, (2019).
34. Erdogan, F., and B. H. Wu. "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties." pp. 449-456, (1997).
35. Aydin, K., "Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 42, pp. 112-124, (2013).
36. Wattanasakulpong, N. and Chaikittiratana, A., "Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method", *Meccanica*, Vol. 50, pp. 1331-1342, (2015).
37. Chen, D., Yang, J. and Kitipornchai, S., "Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108, pp. 14-22, (2016).
38. Bellman, R. and Casti, J., "Differential quadrature and long-term integration", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, pp. 235-238, (1971).
39. Khiem, N.T. and Lien, T.V., "A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, pp. 737-751, (2001).

Frequency Analysis of Cracked Porous Functionally Graded Beams on Elastic Foundation using Reddy Third Order Shear Deformation Theory

Mohammad Amin Forghani[1]
Yousef Bazargan-lari[2] Parham Zahedinejhad[3]
Mohammad Javad Kazemzadeh[4]

1. Introduction

Generally Functionally Graded Materials are made of ceramic and metal parts. Due to the fact that the structural material of ceramic has a low heat transfer coefficient and high resistance to temperature, it can resist high heat. On the other hand, another structural material, metal, provides the required flexibility. It is noteworthy that due to the continuous changes in mechanical properties, the discontinuity problems that exist in composite structures do not arise in functional materials. However, minor damages may occur to the structure of functional grade materials, which in more serious environmental conditions (vibration, corrosion, and high temperature) can lead to more general damages. The appearance of cracks in a structure reduces the stiffness, mass and damping and as a result changes in the vibrational properties of a structure. In many structural issues located on the soil foundation, for simplicity, the elastic foundation is usually modeled by Winkler's base. However, it has been shown that the behavior of substrate materials in engineering cannot be expressed solely by the Winkler elastic foundation model, which includes independent linear tensile springs. For this reason, in order to find a more physical and accurate basic model, Pasternak proposed a two-parameter foundation model with shear interactions. Porosity, which due to large differences in freezing temperature between components during the fabrication process of functional grade materials may cause microscopic cavities in the material during the sintering process, in some structures provides a good opportunity for progress in mechanical properties. One of the main candidates for structures under impact or dynamic loads is porous functional graded materials that are extremely energy absorbing. In general, there are fewer studies on the free vibration of high-order porous FG beams. Due to the special complexity of problem solving based on the third order shear theory of beams, strong numerical methods are needed to solve the governing equations and their boundary conditions. The Differential Quadrature Method is one of the numerical methods in which the governing differential equations are converted into a group of first-order algebraic equations using weight coefficients. Thus, at each point, the derivative is expressed as a linear sum of weighting coefficients and function values at that point and other points in the domain. The basis of the type of problem can be a system of linear or nonlinear equations. In this study, frequency analysis of cracked exponentially porous beams on an elastic foundation using third-order shear theory is adopted for use in thick beams, which has not been done before with this method. Moreover, the non-uniform and asymmetric distribution model of porosity in combination with the exponential model is considered, which adds to the attractiveness of the work. The governing equations and boundary conditions are derived from the Hamilton principle. These equations are discretized and solved by means of the Generalized Differential Quadrature Method. By applying this approach, the free frequency of cracked FG beams is obtained. Also, geometrical parameters, crack position, porosity coefficient and elastic foundation on free vibration of this type of beams are investigated.

2. Theory, formulation and governing equations

Models for distributing properties in functional graded materials express mathematical relationships for each property at any point in the material. This relationship is defined in terms of point coordinates and the properties of the beginning and end (the two components that make up the functional graded material). From the various models that exist for the distribution of properties in scaled functional materials, the exponential model that is used in most studies is selected. Moreover, in order to investigate the effect of porosity in cracked functional graded beams, a non-uniform and asymmetric porosity distribution model is selected

[1]. PhD Student, Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran
[2]. Corresponding Author, Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran. Email: bazarganlari@iaushiraz.ac.ir
[3]. Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran
[4]. Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran

in combination with the exponential model. In order to model the edge crack in the beam, a massless torsional spring with torsional stiffness is used, which connects the two parts separated by the crack as shown in Figure 1 and 2 at the point of discontinuity.

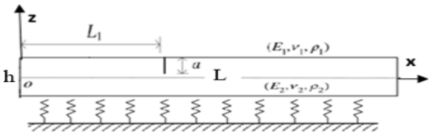


Figure 1. Changes in base materials in cracked exponential FG beams

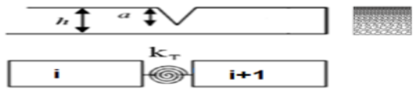


Figure 2. Open edge crack model and the porosity distribution in the exponential FG beam

Third order Shear Deformation Theory

For vibrational modeling of thick beams, more accurate theories than Euler-Bernoulli and Timoshenko's theory should be used, which have more computational volume and complexity, and the shear correction factor is eliminated. One of the most important higher order shear deformation theories is Reddy's third-order shear theory. In this theory, unlike classical and first-order shear theories, the cross-sectional area of the beam is no longer considered as a smooth surface. The displacement field in this theory is accompanied by hypotheses. The shear component of the longitudinal displacement increases in such a way that changes the order of the three shear strains in the thickness of the beam so that the shear stress at the upper and lower levels of the beam becomes zero.

Discretization of equations in the form of differential quadrature method

At this stage, the equations of motion and the corresponding boundary conditions are converted to algebraic equations by the DQ method. N are the number of discretization points and A_i, B_i, C_i, D_i are the weight constants of the first, second, third and fourth degrees of differential quadrature respectively, obtained from the Lagrangian interpolation polynomial functions. For discretization, the Gauss-Lobatto-Chebyshev non-uniform distribution method is used, which has the advantage over other point distribution methods that the accumulation of points in the border areas will be more than the middle areas of the range, which increases the accuracy of the results.

3. Numerical results

In order to derive the natural frequencies of the exponentially functionally graded beam on the elastic foundation, first the convergence behavior of the solution method is examined and then the comparison with other articles is considered to determine the accuracy of the answers and the results. In Figure 3, the simultaneous effect of crack depth and porosity on the dimensionless first frequency of a functionally graduated cracked beam is extracted. Due to the increase in the porosity coefficient, the dimensional frequency of the cracked FG beam decreases significantly, which is quite visible when the crack is at the surface of the FG beam, but with increasing crack depth, it has less effect.

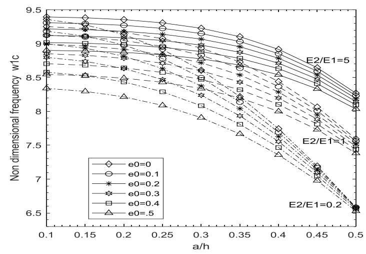


Figure 3. Effect of porosity coefficients on the first dimensionless frequency of the cracked FG beam of different functions of simple boundary conditions and l/h=5 with changing the crack depth a/h in the middle of the beam

4. Conclusion and Discussion

In this study, it was observed that in relatively thick and thick beams of the third order shear theory, more accurate results are extracted due to the avoidance of using the shear correction factor. By changing the longitudinal position of the crack, the frequency ratio of the beam decreases and the minimum value occurs in the middle of the beam. Moreover, with increasing the modulus of elasticity ratio, the frequency ratio increases due to the increase in stiffness of the beam. When the depth of the crack increases, the dimensionless frequency of the cracked beam decreases significantly, while, increasing the elastic coefficients of the foundations, due to the increase of the rigidity of the system, the frequency ratio of the beam increases. Also, with increasing the porosity coefficient, the dimensionless frequency of the cracked beam is significantly reduced due to the reduction of the stiffness of the beam, which has a greater effect on shallow cracks. Therefore, by using these effects and proper selection of elastic foundation coefficients, the effects of reducing the edge crack frequency at different depths can be compensated and at the same time, by selecting the appropriate porosity coefficient, these effects can be balanced. The results and output of this study can have a special application in the equipment of prediction, occurrence, detection, and control of cracks in functional graded structures and in the optimal design of these structures